

# استنتاج در منطق مرتبه اول

قوانین استنتاج منطق گزاره‌ای قابل استفاده در منطق مرتبه اول هستند.

مثال:

$\forall X(\text{man}(X) \Rightarrow \text{mortal}(X))$   
 $\text{man}(\text{socrates})$ ,  
 $\text{man}(\text{socrates}) \Rightarrow \text{mortal}(\text{socrates})$ ,  
 $\text{mortal}(\text{socrates})$

if p is true  
 and  
 $p \Rightarrow q$  is true,  
 then infers q to be true

مادوس پونیس

در منطق مرتبه اول به دلیل داشتن سورها، از قوانین زیر هم استفاده می‌شود:

○ حذف سور عمومی (Universal Elimination)

$(\forall x) P(x) \vdash P(c)$ .

○ If  $(\forall x) P(x)$  is true, then  $P(c)$  is true for any constant  $c$  in the domain of  $x$ , i.e.,  $(\forall x) P(x) \models P(c)$ .

Replace all occurrences of  $x$  in the scope of  $\forall x$  by the same ground term (a constant or a ground function).

مثال

$(\forall x) \text{eats}(\text{Ziggy}, x) \vdash \text{eats}(\text{Ziggy}, \text{IceCream})$

○ معرفی سور وجودی (Existential Introduction)

$P(c) \vdash (\exists x) P(x)$

○ If  $P(c)$  is true, so is  $(\exists x) P(x)$ , i.e.,  $P(c) \models (\exists x) P(x)$

Replace all instances of the given constant symbol by the same new variable symbol.

مثال

$\text{eats}(\text{Ziggy}, \text{IceCream}) \vdash (\exists x) \text{eats}(\text{Ziggy}, x)$

○ حذف سور وجودی (Existential Elimination)

From  $(\exists x) P(x)$  infer  $P(c)$ , i.e.,  $(\exists x) P(x) \models P(c)$ , where  $c$  is a new constant symbol,

All we know is there must be some constant that makes this true, so we can introduce a brand new one to stand in for that constant, *even though we don't know exactly what that constant refer to.*

مثال

$(\exists x) \text{eats}(\text{Ziggy}, x) \models \text{eats}(\text{Ziggy}, \text{Stuff})$

در [Russel, 2003] سه نوع استنتاج اصلی برای منطق مرتبه اول، عنوان شده‌است:

○ زنجیره پیشرو

○ زنجیره پسرو

○ رزولوشن

زنجیره پیشرو و پسرو، مشابه استنتاج پیشرو و پسروی است که در سیستم‌های مبتنی بر قاعده (قانون)، توضیح داده‌شد. رزولوشن در منطق مرتبه اول هم مشابه رزولوشن در منطق گزاره‌ای است و باید جملات به CNF، تبدیل شوند.

پرسش: CNF چیست؟ 

### مراحل تبدیل به CNF

- ۱- تبدیل  $\Leftrightarrow$  و  $\Rightarrow$  ها به  $\wedge$  و  $\vee$  ها
- ۲- انتقال  $\neg$  به طرف داخل
- ۳- استانداردسازی متغیرها
- ۴- رویه Skolemization یا حذف سورهای وجودی
- ۵- حذف سورهای عمومی
- ۶- توزیع  $\wedge$  روی  $\vee$

### رزولوشن (Resolution)

- تبدیل به CNF
- یکسانسازی
- اثبات از طریق رد تناقض (proof by contradiction)

مثال: آیا جمله G، با روش رزولوشن قابل استنتاج یا اثبات است؟

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee G) \wedge (\neg D \vee G)$$

### بررسی ویژگی‌های مهم منطق مرتبه اول

منطق؛ شامل گرامر، معنا، مجموعه قواعد استنتاج + اصول است.


۱- جامع بودن (Soundness): هر تئوری در آن به صورت منطقی معتبر یا همیشه درست باشد.

۲- کامل بودن (Completeness): هر جمله همیشه درست (معتبر)، تئوری باشد یعنی با استفاده از اعمال قوانین استنتاج بر روی اصول، بتواند اثبات شود. منطق مرتبه اول از طریق گزاره‌سازی کامل است و هر جمله استلزام شده، می‌تواند اثبات شود. چرا؟

۳- تصمیم پذیری (Decidability): منطق گزاره‌ای تصمیم پذیر است ولی منطق مرتبه اول، نیمه تصمیم پذیر (semidecidable) است. چرا؟

- Algorithms exist that say “yes” to every entailed sentence
- No algorithm exists that says “no” to every nonentailed sentence

۴- یکنواختی (Monotonicity): اگر  $KB \models \alpha$  نگاه  $KB \wedge \beta \models \alpha$  باشد به عبارت دیگر  $KB \models \alpha \Rightarrow KB \wedge \beta \models \alpha$

پرسش: منطق مرتبه اول، کدام یک از ویژگی‌های بالا را داراست؟ 

### تمرین‌ها

تمرین ۱-۹: آیا استنتاج مادوس پوننس جامع است؟ کامل چه طور؟

تمرین ۲-۹: تحقیق کنید چرا هر منطق مرتبه اول کامل، تصمیم پذیر است.

تمرین ۳-۹: اگر در عاملی  $KB = (B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge \neg B_{1,1}$  باشد، آیا می‌تواند با الگوریتم رزولوشن جمله  $\neg P_{1,2}$  را ثابت کند.

گاهی سکوت بیش از هر استدلالی به ما کمک می‌کند. (متسکیو)