# برنامه نویسی پویا

## ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها (Chained Matrix Multiplication)

**پرسش:** تعداد ضربهای مورد نیاز ؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = ?$$

پاسخ:

$$A_{2\times3}B_{3\times4} = C_{2\times4}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$$

So each element requires **3 multiplications**. The total number of multiplications for C is

$$2\times3\times4 = 24.$$

در حالت کلی **تعداد ضربهای مورد نیاز** $A_{i\times j}B_{j\times k}$ برابر $\boldsymbol{i\times j\times k}$ است.

**مثال:** تعداد ضربهای موردنیاز برای $A_{20\times2}B_{2\times30}C_{30\times12}D_{12\times8}$ حساب کنید.

نخست باید ترتیب‌های ممکن را ایجاد و سپس در ترتیب‌های ممکن، تعداد حاصلضرب را حساب کنیم.

$((AB)C)D:\ 20\times2\times30+20\times30\times12+20\times12\times8=10320$

$(A(BC))D:\ 2\times30\times12+20\times2\times12+20\times12\times8=3120$

$A(B(CD)):\ 30\times12\times8+2\times30\times8+20\times2\times8=3680$

$(AB)(CD):\ 20\times2\times30+30\times12\times8+20\times30\times8=8880$

$A((BC)D):\ 2\times30\times12+2\times12\times8+20\times2\times8=1232$

**مساله اصلی یافتن ترتیبی از محاسبه حاصلضرب‌هاست که کمترین تعداد ضرب را نیاز داشته باشد.**

**پرسش:** ترتیب‌های ممکن برای حاصلضرب پنج ماتریس $A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5$ چیست؟ ترتیب‌های ممکن را نشان دهید.

## رویکرد برنامه‌نویسی پویا

$$\begin{cases} M[i][j] = \min\limits_{i\le k\le j-1}\{M[i][k]+M[k+1][j]+d_{i-1}d_kd_j\}, & \text{for } i<j \\ M[i][i]=0 \end{cases}$$

**پرسش:** آیا اصل بهینگی برای مساله یافتن ترتیب بهینه(کمترین تعداد ضرب)، برقرار است؟

**مثال:**

$$\begin{array}{cccccc} A_1 \times & A_2 \times & A_3 \times & A_4 \times & A_5 \times & A_6 \\ 5\times2 & 2\times3 & 3\times4 & 4\times6 & 6\times7 & 7\times8 \\ d_0\ d_1 & d_1\ d_2 & d_2\ d_3 & d_3\ d_4 & d_4\ d_5 & d_5\ d_6 \end{array}$$

$M[1][2]=5\times2\times3=30$

$M[2][3]=2\times3\times4=24$

$M[3][4]=3\times4\times6=72$

$M[4][5]=4\times6\times7=168$

$M[5][6]=6\times7\times8=336$

$$M[1][3] = \min_{1\le k\le 2}\{M[1][k] + M[k+1][3] + d_0 d_k d_3\}$$
$$= \min\{M[1][1] + M[2][3] + d_0 d_1 d_3,\ M[1][2] + M[3][3] + d_0 d_2 d_3\}$$
$$= \min\{0 + 24 + 5\times 2\times 4,\ 30 + 0 + 5\times 3\times 4\}$$
$$= 64$$

$$M[1][4] = \min_{1\le k\le 3}\{M[1][k] + M[k+1][4] + d_0 d_k d_4\}$$
$$= \min\{M[1][1] + M[2][4] + d_0 d_1 d_4,\ M[1][2] + [3][4] + d_0 d_2 d_4,\ M[1][3] + [4][4] + d_0 d_3 d_4\}$$
$$= 132$$

**Problem:** Determining the min no. of multiplications needed to multiply $n$ matrices .
**Inputs :** no. of matrices, $n$, array of integers $d$ where $d[i-1]$x$d[i]$ is the dimension of the $i$th matrix.
**Outputs:** *minmult*, the min no. of multiplications.

```
void minmult (int n, const int d[], index P[][])
{
   index i, j, k, diagonal;
   int M[1..n][1..n];

  for (i=1; i ≤ n; i++)
       M[i][i]=0;

   for (diagonal=1; diagonal ≤ n–1; diagonal++) {
        for (i=1; i ≤ n– diagonal; i++)
           {
              j = i+ diagonal;
              M[i][j] = min_{i≤k≤j–1} {M[i][k] + M[k+1][j] + d[i–1]d[k]d[j]}
              P[i][j] = a value of k that gave the minimum;
           }
       return M[1][n]; }

}
```

**Alg. 6-1**

Time Complexity?

$$T(n) \in \Theta(n^3)$$

**Problem:** Print the optimal order for multiplying $n$ matrices.

**Inputs:** positive integer $n$ and the array $P$.

**Output:** the optimal order for multiplying the matrices.

**چاپ ترتیب بهینه برای پرانتزگذاری ماتریس‌ها**

```
void order (index i, j)
{
   if (i = = j)
         cout  << "A" << i;
     else {
              k=P[i][j] ;
              cout  << "(";
              order(i, k);
              order(k+1, j);
              cout  << ")";
          }
}
```

**Alg. 6-2**

Time Complexity?

$$T(n) \in \Theta(n)$$

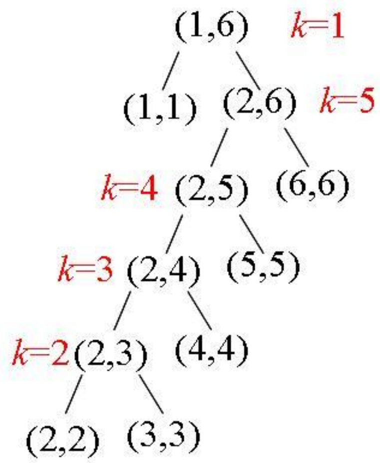
**پرسش:** چگونه از ماتریس P، ترتیب پرانتزگذاری ماتریس‌ها(شکل۶-۱)، جهت محاسبه حاصلضرب، به‌دست‌می‌آید؟

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 30 & 64 & 132 & 226 & 348 \\
2 & & 0 & 24 & 72 & 156 & 268 \\
3 & & & 0 & 72 & 198 & 366 \\
4 & & & & 0 & 168 & 392 \\
5 & & & & & 0 & 336 \\
6 & & & & & & 0
\end{array}
$$

**ماتریس M**

$$
P = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & 0 & 3 & 4 & 5 \\
 & & & 0 & 4 & 5 \\
 & & & & 0 & 5 \\
 & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

**ماتریس P**




$$(A_1((((A_2A_3)A_4)A_5)A_6))$$

**شکل۶-۱:** درخت بازگشتی

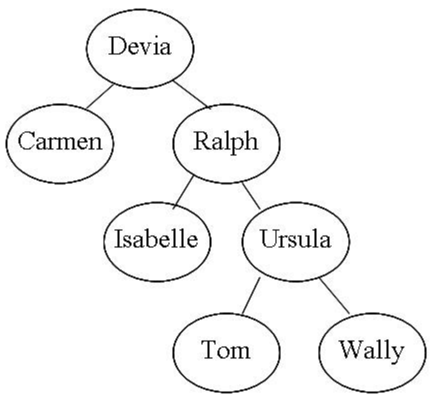
**پرسش:** کمترین تعداد ضرب و ترتیب بهینه را برای چهار ماتریس $A_{2\times3} \times B_{3\times4} \times C_{4\times6} \times D_{6\times7}$ با روش برنامه نویسی پویا، بیابید.

# درخت جستجوی دودویی بهینه

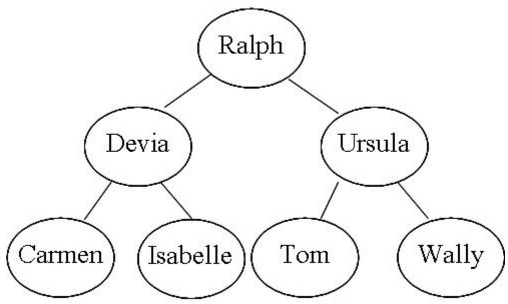
(Optimal Binary Search Trees = OBST)

یادآوری از ساختمان داده‌ها

**Definition of Binary Tree:** A binary tree is the tree that each node has at most two children.
1. Depth (Level): the number of edges from the root to the node.
2. Left Subtree: the subtree whose root is the left child of the node.
3. Right Subtree: the subtree whose root is the right child of the node.
4. Balanced: the depth of the two subtrees of every node never differs by more than 1.




**شکل۶-۳:** درخت دودویی نامتوازن




**شکل۶-۲:** درخت دودویی متوازن

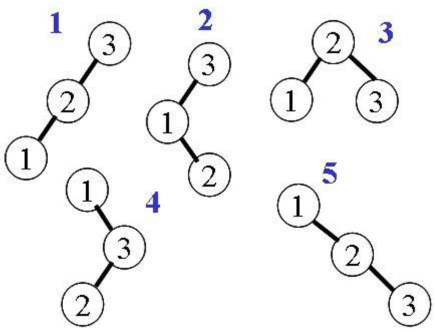
# درخت جستجوی دودویی (Binary Search Trees = BST)

A binary search tree is a binary tree of items (keys) that come from an ordered set, such that:
1. Each node contains one key.
2. The keys in the left subtree of a given node are less than the key in that node.
3. The keys in the right subtree of a given node are greater than or equal to the key in that node.

**مثال:**

Five different trees where $n$=3. Let $p_1$=0.7, $p_2$=0.2 and $p_3$=0.1. What is the average search time?

1. 3(0.7)+2(0.2)+1(0.1) = 2.6
2. 2(0.7)+3(0.2)+1(0.1) = 2.1
3. 2(0.7)+1(0.2)+2(0.1) = 1.8
4. 1(0.7)+3(0.2)+2(0.1) = 1.5
5. 1(0.7)+2(0.2)+3(0.1) = 1.4



**شکل ۶-۴:** درخت‌های جستجوی دودویی ممکن

## یافتن درخت جستجوی دودویی بهینه

A more efficient algorithm is **Dynamic Programming**. The optimal tree for $Key_i$ through $Key_j$ is arranged in a tree that minimizes $A[i][j]=\sum_{m=i}^{j} c_m p_m$ , $A[i][i]=p_i$

$c_m$: the number of comparisons to locate $Key_m$. $p_m$: the probability that $Key_m$ is the search key.

$$A[i][j]=\min_{i\le k\le j}\{A[i][k-1]+A[k+1][j]\}+\sum_{m=i}^{j} p_m,\quad \text{for } i<j$$

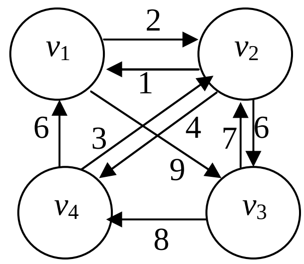
**نکته:** الگوریتم برنامه‌نویسی پویا برای یافتن درخت جستجوی دودویی بهینه، مشابه الگوریتم یافتن ترتیب بهینه در حاصلضرب زنجیره‌ای ماتریس‌هاست.

## مساله فروشنده دوره‌گرد ( Traveling Salesperson Problem = TSP )

```
void travel (int n, const number W[][], index P[][], number& minlength )
{ index i, j, k;
  number D[1..n][subset of V–{v1}];
  for (i = 2; i ≤ n; i++)
     D[i][ϕ]=W[i][1] ;
  for (k = 1; k ≤ n–2; k++)
     for (all subsets A⊆ V–{v1} containing k vertices)
        for (i such that i ≠1 and vi is not in A) {
           D[i][A]=min {W[i][j]+D[j][A–{vj}]} ;
           P[i][A]= value of j that gave the minimum;}
  D[1][V–{v1} ]=min {W[i][1]+D[j][V–{v1,v2}]} ;
  P[i][V–{v1} ]= value of j that gave the minimum ;
  minlength=D[1][V–{v1}];
 }
```

**Alg. 6-3**

$$T(n)=\sum_{k=1}^{n-2}(n-1-k)k\binom{n-1}{k}=(n-1)\sum_{k=1}^{n-2}k\binom{n-2}{k}$$
$$=(n-1)(n-2)2^{n-3}\in\Theta(n^2 2^n)$$




**شکل ۶-۵:** گراف مثال

Length[$v$1,$v$2,$v$3,$v$4,$v$1] = 22
Length[$v$1,$v$3,$v$2,$v$4,$v$1] = 26
Length[$v$1,$v$3,$v$4,$v$2,$v$1] = 21

If there are n vertices, how many possible tours?

**($n$–1)($n$–2)($n$–3)…1 = ($n$–1)!**

**مثال:** برای ۲۰ شهر، مساله فروشنده دوره‌گرد را بررسی کنید.

**Brute-force:** 19! µs = 3857 years ☹

**Dynamic Programming:** (20–1)(20–2)$2^{20-3}$ µs = 45 sec ☺!!

### تمرین‌ها

**تمرین ۶-۱:** نشان دهید الگوریتم ۶-۱، دارای تکرار $T(n)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\in\Theta(n^3)$ است.

**تمزین ۶-۲:** ترتیب‌های ممکن برای حاصلضرب شش ماتریس $A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5\times A_6$ بیابید؟