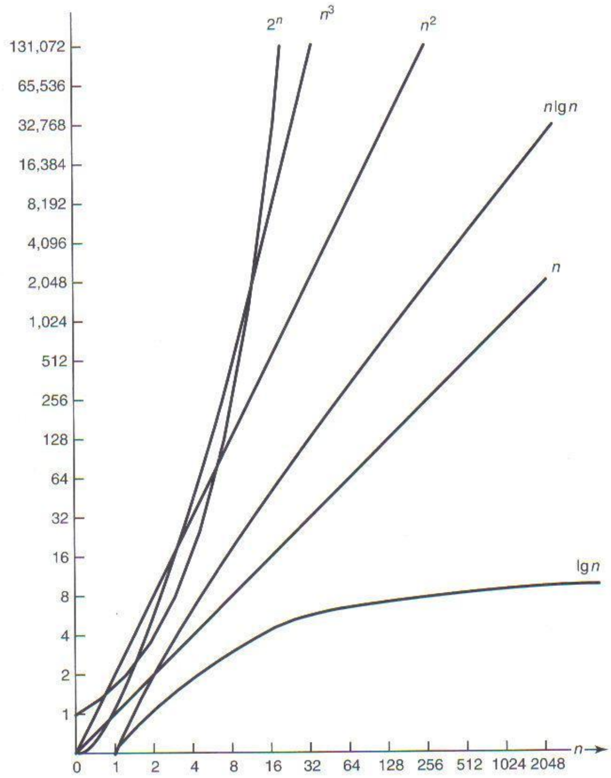
آنالیز الگوریتم‌ها

پرسش: مرتبه الگوریتم چیست؟ (یادآوری از ساختمان داده‌ها)

$O(lg\ n)<O(n)<O(nlg\ n)<O(n^2)<O(n^3)<O(2^n)$



شکل ۲-۱: مرتبه رشد توابع پیچیدگی متداول

n	$f(n)=\lg n$	$f(n)=n$	$f(n)=n\lg n$	$f(n)=n^2$	$f(n)=n^3$	$f(n)=2^n$
10	0.003 μs*	0.01 μs	0.033 μs	0.10 μs	1.0 μs	1 μs
20	0.004 μs	0.02 μs	0.086 μs	0.40 μs	8.0 μs	1 ms†
30	0.005 μs	0.03 μs	0.147 μs	0.90 μs	27.0 μs	1 s
40	0.005 μs	0.04 μs	0.213 μs	1.60 μs	64.0 μs	18.3 min
50	0.006 μs	0.05 μs	0.282 μs	2.50 μs	125.0 μs	13 days
10^2	0.007 μs	0.10 μs	0.664 μs	10.00 μs	1.0 ms	4×10^{13} years
10^3	0.010 μs	1.00 μs	9.966 μs	1.00 ms	1.0 s	
10^4	0.013 μs	10.00 μs	130.000 μs	100.00 ms	16.7 min	
10^5	0.017 μs	0.10 ms	1.670 ms	10.00 s	11.6 days	
10^6	0.020 μs	1.00 ms	19.930 ms	16.70 min	31.7 years	
10^7	0.023 μs	0.01 s	2.660 s	1.16 days	31,709 years	
10^8	0.027 μs	0.10 s	2.660 s	115.70 days	3.17×10^7 years	
10^9	0.030 μs	1.00 s	29.900 s	31.70 years		

*1 μs $=10^{-6}$ second.

†1 ms $=10^{-3}$ second.

جدول ۲-۱: مقایسه زمان اجرای الگوریتم‌ها با مرتبه‌های رشد متفاوت

ای بزرگ؛ کران بالا (Big O; Upper bound)

For a given complexity function $f(n)$, $O(f(n))$ is the set of complexity functions $g(n)$ for which there exists some positive real constant c and some nonnegative integer N such that for all $n \geq N$, $g(n) \leq cf(n)$
We say that $g(n)$ is *big O* of $f(n)$, if $g(n) \in O(f(n))$.

مثال:

$n^2+10n \leq 2n^2$ for $n \geq 10 \Rightarrow n^2+10n \in O(n^2)$

Big O describes the asymptotic behavior of a function, and puts an *asymptotic upper bound* (*at most*) on a function.

امگای بزرگ؛ کران پایین (Big Ω ;Lower bound)

For a given complexity function $f(n)$, $\Omega(f(n))$ is the set of complexity functions $g(n)$ for which there exists some positive real constant c and some nonnegative integer N such that for all $n \geq N$, $g(n) \geq cf(n)$
We say that $g(n)$ is *big Ω* of $f(n)$, if $g(n) \in \Omega(f(n))$.

مثال:

$n^2+10n \geq n^2$ for $n \geq 0 \Rightarrow n^2+10n \in \Omega(n^2)$

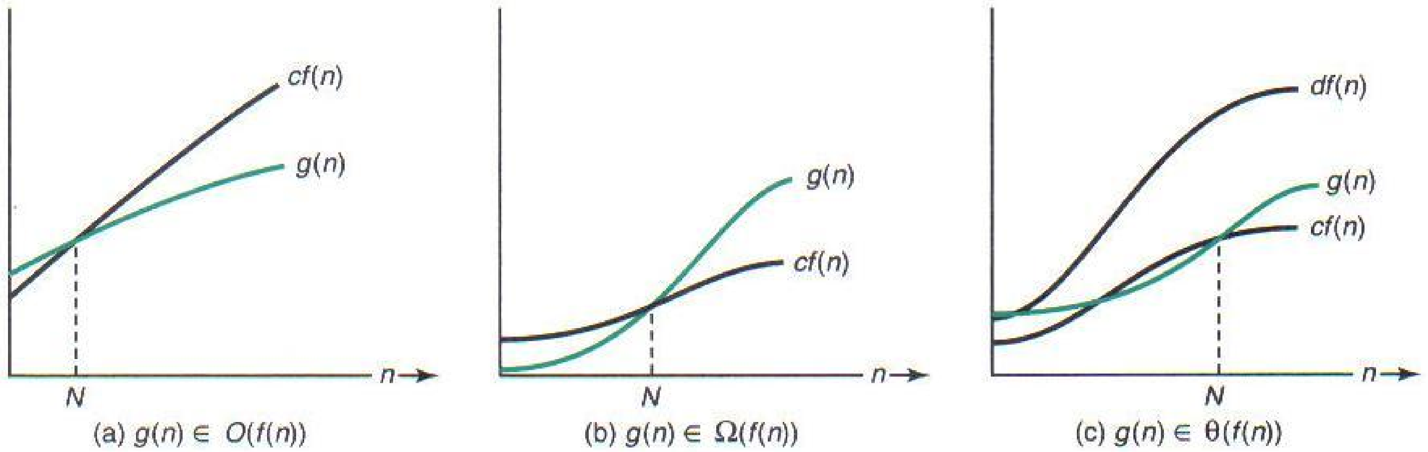
Big Ω describes the asymptotic behavior of a function, and puts an *asymptotic lower bound* (*at least*) on a function.

تتا؛ مرتبه الگوریتم (Big Θ;Order)

For a given complexity function $f(n)$, $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$
This means that $\Theta(f(n))$ is the set of complexity functions $g(n)$ for which there exists some positive real constant c and d and some nonnegative integer N such that, for all $n \geq N$, $cf(n) \leq g(n) \leq df(n)$
We say that $g(n)$ is *order* of $f(n)$, if $g(n) \in \Theta(f(n))$.

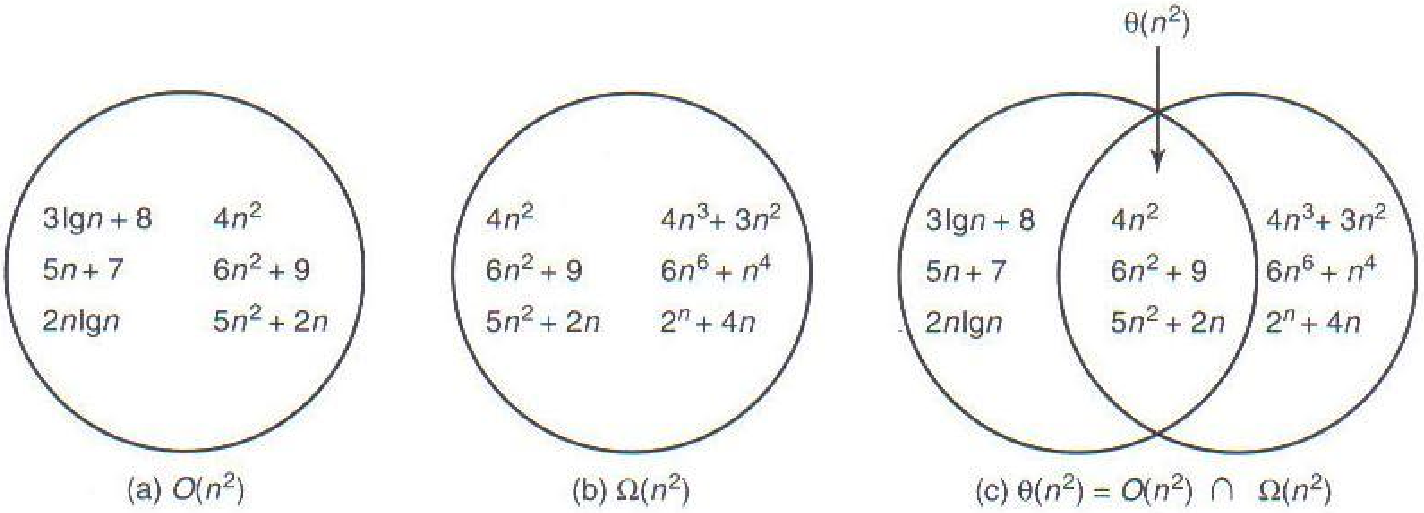
مثال:

$n^2 \leq n^2+10n \leq 2n^2$ for $n \geq 10 \Rightarrow n^2+10n \in \Theta(n^2)$



شکل ۲-۲: مفهوم ای بزرگ، امگای بزرگ و تتا

مثالی دیگر:



شکل ۲-۳: بیان مفهوم ای بزرگ، امگای بزرگ و تتا روی یک مثال

ای کوچک (Small o)

For a given complexity function $f(n)$, $o(f(n))$ is the set of all complexity functions $g(n)$ satisfying the following:
For every positive real constant c there exists a nonnegative integer N such that, for all $n \geq N$, $g(n) \leq cf(n)$
We say that $g(n)$ is *small o* of $f(n)$, if $g(n) \in o(f(n))$. If $g(n) \in o(f(n))$, we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

مثال:

$n \in o(n^2)$.

قضیه

If $g(n) \in o(f(n))$, then $g(n) \in O(f(n)) - \Omega(f(n))$. That is, $g(n)$ is in $O(f(n))$ but is not in $\Omega(f(n))$.

پرسش: امگای کوچک چگونه تعریف‌می‌شود؟

Is $10n^3 - 3n \in \Theta(n^3)$? Yes, since $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-3n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{10n^3}{n^3} - \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^3} = 10$ *Is* $n\log_e n \in o(n^2)$? Yes, since $\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_e n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_e n}{n} = ?$ Use L'Hopital's Rule: $\lim_{n\to\infty}\frac{(\log_e n)'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1} = 0$ *if* $y = \log_a x$ *then* $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$	**قضیه** $\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \begin{cases} c & \Rightarrow \quad g(n) \in \Theta(f(n)) \quad \text{if } c>0 \\ 0 & \Rightarrow \quad g(n) \in o(f(n)) \\ \infty & \Rightarrow \quad f(n) \in o(g(n)) \end{cases}$

ویژگی‌های مرتبه

1- $g(n) \in O(f(n))$ if and only if $f(n) \in \Omega(g(n))$.

2- $g(n) \in \Theta(f(n))$ if and only if $f(n) \in \Theta(g(n))$.

3- If $b > 1$ and $a > 1$, then $\log a\ n \in \Theta(\log b\ n)$.

4- If $b > a > 0$, then $a\ n \in o(\ bn)$.

5- For all $a > 0$, then $a\ n \in o(\ n!)$.

6- $\Theta(\log n) < \Theta(n) < \Theta(n\log n) < \Theta(n^2) < \Theta(n^k) < \Theta(a^n) < \Theta(n!)$.

7- If $c \geq 0$, $d > 0$, $g(n) \in O(f(n))$, and $h(n)\ \Theta \in (f(n))$, then $c \times g(n) + d \times h(n) \Theta \in (f(n))$.

قضیه

Let $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, where $a_n > 0$, and $a_0, a_1, \ldots, a_n$ are real numbers, then $f(x) \in \Theta(x^n)$.

نمادهای مجانبی مقایسه‌ای توابع با مقایسه اعداد

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(g(n)) && \approx \quad a \leq b \\
f(n) &= \Omega(g(n)) && \approx \quad a \geq b \\
f(n) &= \Theta(g(n)) && \approx \quad a = b \\
f(n) &= o(g(n)) && \approx \quad a < b \\
f(n) &= \omega(g(n)) && \approx \quad a > b
\end{aligned}
$$

f(n) is asymptotically smaller than g(n) if $f(n) = o(g(n))$

پرسش: آیا این مقایسه، کاملا درست است؟چرا؟

تمرین‌ها

تمرین ۲-۱: ویژگی‌های بازتابی، تراگذری، تقارنی، پادتقارنی را در مورد نمادهای مجانبی به عنوان عملگرهای رابطه‌ای، بررسی کنید.

	O	Ω	Θ	o	ϖ
بازتابی					
تراگذری					
تقارنی					
پادتقارنی					